

Introduction à la modélisation des cycles biogéochimiques - Le modèle de boîte -

Bernard Aumont
aumont@lisa.ipsl.fr
www.lisa.u-pec.fr/~aumont

1

I – Introduction

Les éléments du système terre et leur cycle biogéochimique :

Depuis la formation de la terre ($-4,5 \times 10^9$ ans) :

- l'apport de matériaux (atomes) « extra-terrestre » (par ex. météorites) est resté mineur
- la gravitation empêche les pertes de matériaux vers l'espace (à l'exception H et He)

⇒ L'ensemble des atomes constituant le système terrestre est conservé :
terre ≈ système fermé

Les atomes, assemblés en molécules diverses, sont en migration incessante entre les différents compartiments (atmosphère, océan, croûtes terrestres ...). A l'échelle globale, le transfert des éléments entre les différents compartiments est de nature cyclique.

Cycle biogéochimique = étude des flux d'éléments entre les différents compartiments

2

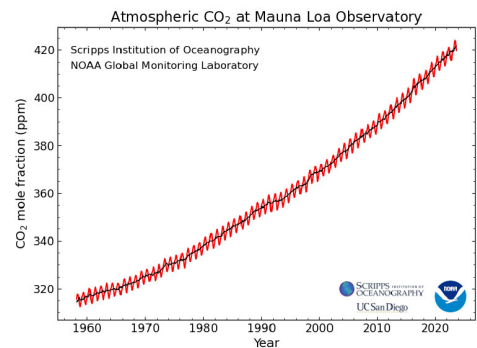
Intérêt de la modélisation des cycles biogéochimiques

- ⇒ Identifier l'origine et le devenir d'une espèce particulière dans un compartiment donné
- ⇒ Quantifier le contenu des différents réservoirs, les vitesses d'échange entre réservoirs et les temps de renouvellement dans un réservoir donné.
- ⇒ Prédire comment une perturbation se répercute sur l'ensemble du cycle
- ⇒ Evaluer la contribution des flux associés aux activités humaines en regard des flux naturels

Exemple :

Depuis la révolution industrielle, une partie des besoins énergétiques de l'humanité a été comblée par l'utilisation de combustibles fossiles (charbon, pétrole). Son extraction et sa combustion conduit à transférer du carbone (sous forme organique) depuis la lithosphère vers l'atmosphère (sous forme de CO_2). L'augmentation de CO_2 dans l'atmosphère induisant un changement climatique (par effet de serre), il importe de connaître :

- l'amplitude de l'augmentation du CO_2 dans l'atmosphère
- La durée de cette perturbation, donc le temps requis pour redistribuer ce carbone dans les différents compartiments terrestres.



Evolution de la concentration atmosphérique de CO_2

La réponse à ce type de question est rarement immédiate et passe généralement par une représentation idéalisée (un modèle !) des cycles et des divers processus biogéochimiques impliqués dans la redistribution des espèces.

L'approche par modèle de boîte

Représentation habituellement adoptée pour décrire les cycles biogéochimiques → Modèle de boîte

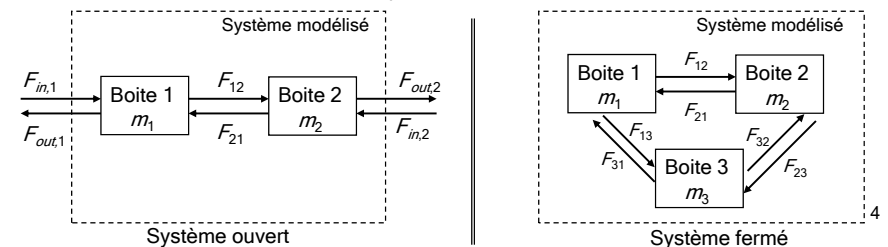
1. Un cycle est représenté comme un système couplé de boîtes (réservoirs, compartiments)

Le contenu d'une boîte est supposé homogène. Une boîte est caractérisée par la quantité de matière qu'elle renferme (masse m ou nombre de mole n).

2. Les échanges de matière entre boîtes sont décrits par des débits

Le débit F représente la quantité de matière transférée d'une boîte à l'autre par unité de temps (ex: $\text{kg} \cdot \text{an}^{-1}$ ou $\text{mole} \cdot \text{an}^{-1}$)

Exemple de schématisation :



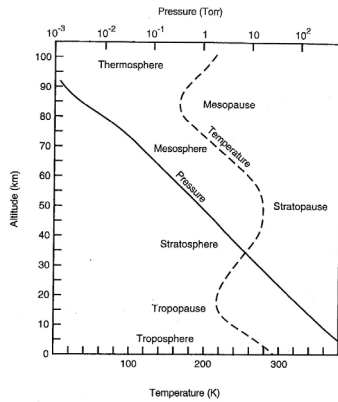
4

Nature des boîtes

Les frontières des boîtes à considérer dépendent du problème à traiter

Exemple de division

- Les grandes « sphères » du système terrestre :
atmosphère, hydrosphère, lithosphère (gaz/liquide/solide) et biosphère (vivant/inerte)
- Catégorisations fines et subdivisions
 - hydrosphère = océan + eaux superficielles + ...
↳ couche de surface mélangée + océan profond
 - atmosphère = troposphère + stratosphère + mésosphère + ...
↳ couche de limite + troposphère libre hémisphère nord / hémisphère sud



Structure verticale de l'atmosphère

5

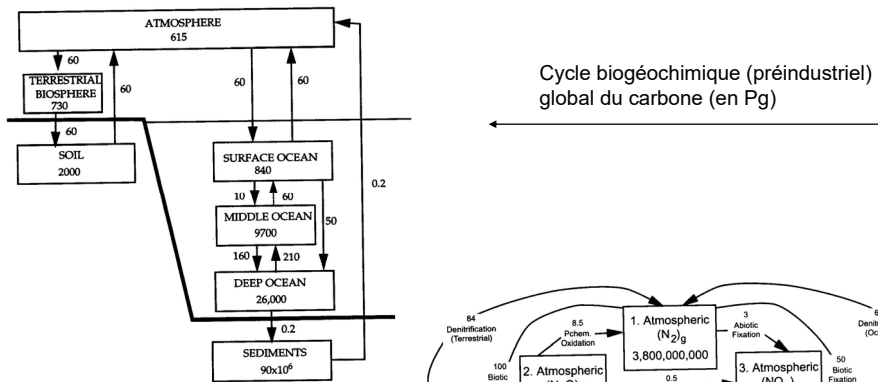
La délimitation des boîtes du système considéré dépend:

- De l'inhomogénéité spatiale de l'espèce considérée dans la « sphère » donnée et des temps caractéristiques associés au processus gouvernant son transfert
- Du niveau de précision désiré pour la description du cycle
- De la capacité à renseigner les débits entre les différentes boîtes du système

Remarque :

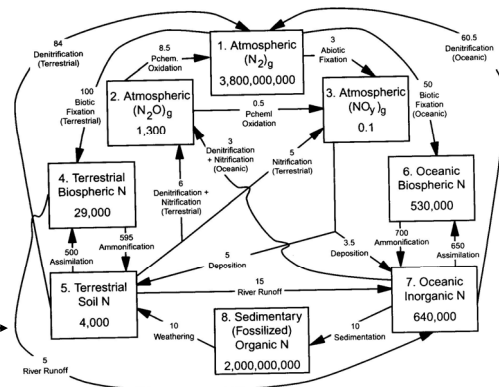
L'utilisation du modèle de boîte dépasse le seul contexte des cycles biogéochimiques. La boîte peut également représenter une zone géographique sur laquelle on souhaite effectuer un bilan de masse (zone urbaine, lac, pays, ...). En pratique, l'approche s'applique aussi bien au bilan des éléments (N, O, C, ...) qu'à celui des espèces (ozone, oxydes d'azote, ...).

6



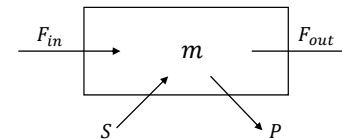
Cycle biogéochimique (préindustriel) global du carbone (en Pg)

Cycle biogéochimique (préindustriel) global de l'azote (en Tg)



I – le modèle linéaire à 1 boîte

Soit une boîte quelconque, soumise à un processus d'advection (transport, F_{in} et F_{out}) et à différents termes sources S (émission, production chimique, ...) ou puits P (sédimentation, consommation chimique, dépôt, ...)



La variation temporelle de la masse m d'une espèce A dans la boîte est obtenue par le bilan de masse (conservation) :

$$\frac{dm}{dt} = F_{in} - F_{out} + S - P$$

Très fréquemment, la perte d'une espèce est directement proportionnelle à sa masse (le modèle est linéaire, les processus de perte sont d'ordre 1 en m). C'est en effet le cas des processus chimiques, de sédimentation ou d'advection de boîtes parfaitement mélangées : $F_{out} = k_{out}m$, $P = km$

$$\frac{dm}{dt} + \underbrace{(k_{out} + k)}_a m = \underbrace{F_{in} + S}_b \quad \begin{cases} a = \sum k_i \quad (\text{temps}^{-1}) \\ b = \sum \text{débit entrant} \quad (\text{masse} \cdot \text{temps}^{-1}) \end{cases} \Rightarrow \frac{dm}{dt} = b - am$$

$$\frac{dm}{b - am} = dt$$

$$-\frac{1}{a} \left(\frac{d(b - am)}{b - am} \right) = dt$$

En notant m_0 la masse au temps $t = 0$, la solution de l'eq. dif. est :

$$m_t = \frac{b}{a} + \left(m_0 - \frac{b}{a} \right) e^{-at}$$

8

Lorsque $t \rightarrow \infty, m \rightarrow m_\infty = \frac{b}{a} = \frac{F_{in} + S}{k_{out} + k} \Rightarrow$ La masse dans la boîte atteint un niveau stationnaire indépendant du temps et de la condition initiale.

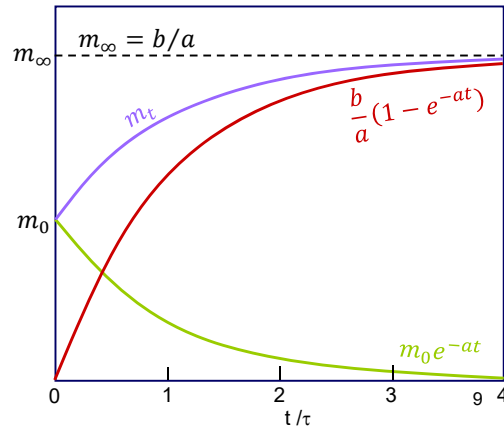
$$\text{niveau stationnaire} = \frac{\text{Intensité des débits entrants}}{\text{fréquence des pertes}}$$

Remarque : l'expression de m_∞ peut être directement déduite de l'eq. dif. en imposant : $\frac{dm}{dt} = 0$

Profil temporel type de la solution

La solution de l'eq. dif. peut également s'écrire sous la forme générale :

$$m_t = \underbrace{m_0 e^{-at}}_{\text{disparition de la contribution des conditions initiales}} + \underbrace{\frac{b}{a}(1 - e^{-at})}_{\text{approche de l'état stationnaire final}}$$



Temps de vie et temps de résidence

Le temps de vie τ d'une espèce est défini comme le temps « moyen » durant lequel une molécule (ou un élément) réside dans la boîte considérée. Le temps de vie correspond au rapport de la masse m par les débits de consommations :

$$\tau = \frac{m}{-(dm/dt)_{\text{perte}}} = \frac{m}{F_{out} + P}$$

Le temps de vie est également communément appelé « temps de résidence ». Habituellement :

- temps de vie : se réfère plutôt aux pertes par transformations chimiques
- temps de résidence : est plutôt utilisé pour caractériser les pertes associées aux processus physiques

Lorsque la perte est d'ordre 1 en m (processus linéaire) : $\tau = \frac{m}{\sum k_i m} = \frac{1}{\sum k_i} = \frac{1}{k_{out} + k}$

Remarque :

On définit le temps de vie τ_i comme le temps de vie qu'aurait l'espèce si elle n'était consommée que par le processus i :

$$\tau_i = \frac{1}{k_i}$$

Le temps de vie global de l'espèce dans la boîte s'exprime donc également selon :

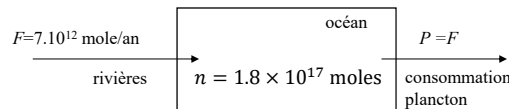
$$\frac{1}{\tau} = \sum k_i = \sum \frac{1}{\tau_i}$$

Le temps de vie global s'obtient à partir des temps de vie associés à chaque processus distinct comme une résistance globale à partir de résistances montées en parallèle.

L'approche permet de hiérarchiser différents processus dans l'élimination d'une espèce d'un milieu donné. Si $\tau_Y \gg \tau_X$, le processus Y est peu efficace en regard du processus X . Le processus X contrôle le temps de vie de l'espèce : $\tau \approx \tau_X$

Exemple 1

Le nombre de mole de silice dissoute dans les océans est de l'ordre de $1,8 \cdot 10^{17}$ moles. L'apport de silice aux océans par les rivières est de l'ordre de $7 \cdot 10^{12}$ mole.an⁻¹. Si la quantité de silice dissoute dans l'océan est stationnaire \Rightarrow l'apport par les rivières doit être compensé par une consommation de silice équivalente dans l'océan. La consommation de silice est assurée par le plancton (formation du squelette) puis sédimentation à la mort du plancton. Quelle est le temps de résidence de la silice dans les océans ?



Le temps de résidence de la silice dans les océans est : $\tau = \frac{n}{P} = \frac{1,8 \times 10^{17}}{7,0 \times 10^{12}} \cong 26\ 000$ ans

En supposant que l'assimilation de la silice par le plancton est un processus d'ordre 1 ($P = kn$):

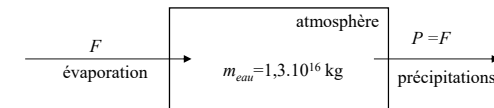
$$k = \frac{P}{n} = \frac{1}{\tau} = 3,9 \times 10^{-5} \text{ an}^{-1}$$

Remarque :

L'apport de silice aux océans pourrait être réduit par eutrophisation des eaux de surface. Selon cette théorie, il faudrait $\approx 26\ 000$ ans pour que la quantité de silice dissoute dans les océans soit significativement réduite !

Exemple 2

L'eau dans l'atmosphère provient de l'évaporation de surface. Elle est éliminée du réservoir atmosphérique lors des précipitations. Sachant que la quantité d'eau dans l'atmosphère est de $1,3 \cdot 10^{16}$ kg et que le taux de précipitation moyen annuel est de 0,2 cm/jour, quel est le temps de résidence de l'eau dans l'atmosphère ?



Surface du globe : $S_g = 4\pi r^2 = 5,1 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$ ($r=6400$ km)

Volume d'eau précipité par jour : $V_{eau} = S_g \cdot T_p = 5,1 \cdot 10^{14} (\text{m}^2) \times 0,002 (\text{m/j}) = 1,2 \cdot 10^{12} \text{ m}^3/\text{j}$

Masse d'eau précipitée par jour : $P = 1,2 \cdot 10^{15} \text{ kg/j}$

Soit la constante cinétique associée aux précipitations : $k = \frac{P}{m} = \frac{1,2 \cdot 10^{15}}{1,3 \cdot 10^{16}} = 0,092 \text{ j}^{-1}$

Le temps de résidence de l'eau dans l'atmosphère est donc : $\tau = \frac{1}{k} = 11$ jours

Exemple 3

Le composé CF_2Cl_2 (CFC-12) est éliminé de l'atmosphère par photodissociation. Son temps de vie est de l'ordre de 100 ans. Au début des années 80, avant l'entrée en vigueur du protocole de Montréal réglementant les émissions de CFC, le rapport de mélange moyen de CFC-12 dans l'atmosphère était de l'ordre de $8,7 \cdot 10^9$ kg (400 pptv) et présentait un taux de croissance de l'ordre de 4% par an. Quelle était l'intensité des émissions en CFC-12 à cette époque ?

Réponse : $4,4 \cdot 10^8$ kg/an

Exemple 4

Le protocole de Montréal a été le premier accord international visant à réduire les émissions de CFC dans l'atmosphère afin de limiter le processus de destruction d'ozone dans la stratosphère. On cherche à apprécier l'efficacité de ce protocole en terme de diminution de la quantité de CFC-12 dans l'atmosphère. Le CFC-12 a un temps de vie de 100 ans (il est consommé par photodissociation dans la stratosphère). L'analyse débute en 1989, date d'entrée en vigueur du protocole. En 1989, la masse de CFC-12 dans l'atmosphère était de $1,0 \cdot 10^{10}$ kg et le débit d'émission de $4 \cdot 10^8$ kg.an⁻¹.

1. Le protocole initial visait une diminution progressive des émissions de CFC pour atteindre un niveau d'émission de 50 % inférieur en 1999. Au-delà de 1999, les émissions auraient été stabilisées à ce niveau, soit $2 \cdot 10^8$ kg.an⁻¹. Montrer que la masse de CFC-12 aurait alors atteint un niveau supérieur à celui observé en 1989. Expliquer pourquoi l'abondance en CFC-12 augmente malgré la diminution des émissions.

2. Le protocole de Montréal a été amendé en 1990 de telle sorte que les émissions de CFC-12 soient nulles en 1996. Afin d'apprécier l'impact de cet amendement, on considère le scénario suivant : (1) maintien des émissions de 1989 à 1996 (2) émissions nulles au-delà de 1996. Calculer la concentration de CFC-12 en 2050 et 2100. Comparer aux valeurs de 1989.

3. Que ce serait-il passé si la mise en application de l'accord amendé avait été retardée de 10 ans ? Pour le calcul, on prendra des émissions inchangées jusqu'en 2006 puis nulles au-delà. Calculer les valeurs en 2050 et 2100.

13

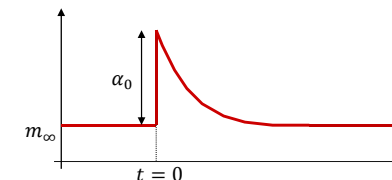
Temps de réponse, méthode des perturbations

Le temps de réponse représente le temps requis pour s'approcher d'un nouvel état d'équilibre suite à une perturbation des flux d'entrée ou de sortie. La méthode des perturbations est couramment utilisée pour évaluer ce temps de réponse, en particulier lorsque les eq. dif. régissant l'évolution de chaque boîte ne possèdent pas de solution analytique simple. La méthode des perturbations est illustrée sur l'exemple précédent du modèle linéaire à 1 boîte.

Soit un système à l'état stationnaire, caractérisé par sa masse m_∞ . A l'instant $t = 0$, on provoque une perturbation instantanée du système :

$$m_0 = m_\infty + \alpha_0$$

$$m_t = m_\infty + \alpha_t$$



On cherche à évaluer le profil temporel α_t afin d'identifier l'échelle de temps nécessaire pour ramener le système vers un état stationnaire. Pour le modèle linéaire à 1 boîte :

$$m_t = m_0 e^{-at} + \frac{b}{a}(1 - e^{-at}) \quad \text{avec : } m_\infty = \frac{b}{a} \quad \text{soit après substitution : } \alpha_t = \alpha_0 e^{-at}$$

=> la perturbation décroît exponentiellement avec le temps

=> le système est stable (retour à l'état initial) : si $t \rightarrow \infty$, alors $\alpha \rightarrow 0$

14

Cette décroissance exponentielle de la perturbation initiale s'observe pour de nombreux systèmes. Par commodité, le temps de réponse τ^* est défini comme le temps requis pour diminuer la perturbation initiale d'un facteur $1/e$ (≈ 0.37) : $\alpha_{\tau^*} = \alpha_0/e$ (par définition). D'après l'évolution α_t précédente :

$$\tau^* = \frac{1}{a} = \frac{1}{k_{out} + k} = \tau$$

Pour le modèle linéaire à 1 boîte :

Le temps de réponse est égal au temps de vie (ou de résidence). Le temps de vie représente donc également une « mesure » du temps requis pour atteindre l'état stationnaire.

Expression du bilan de masse en concentration

Il est souvent pratique d'exprimer le bilan de masse en terme de concentration C dans la boîte plutôt qu'en terme de quantité de matière. Lorsque le volume V de la boîte ne varie pas, la variation de la concentration dans la boîte s'exprime directement à partir du bilan de masse :

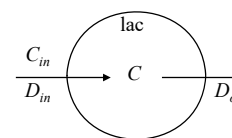
$$\frac{dn}{dt} = b - an \quad \text{soit} \quad \frac{dC}{dt} = \left(\frac{b}{V}\right) - aC$$

$\rightarrow b'$ [concentration \times temps⁻¹]

15

Exemple

Soit un lac alimenté par une rivière de débit D (m³/j). La rivière transporte un polluant de concentration C_{in} (mole.m⁻³). On cherche à exprimer l'évolution de la concentration C de ce polluant dans le lac en fonction du temps, sachant qu'il est également dégradé par décomposition chimique selon un processus d'ordre 1 et de constante k .



• Etat stationnaire (le volume d'eau dans le lac ne varie pas) : $D_{in} = D_{out} = D$

• Perte par réaction chimique dans le lac : $\left(\frac{dC}{dt}\right)_{chim} = -kC$

• Apport par la rivière : $\left(\frac{dC}{dt}\right)_{adv,in} = \frac{D}{V}C_{in}$

• Export par la rivière : $\left(\frac{dC}{dt}\right)_{adv,out} = -\frac{D}{V}C$

$$\frac{dC}{dt} = -kC + \frac{D}{V}(C_{in} - C)$$

Le temps de résidence de l'eau dans le lac est donné par : $\tau_w = V/D$

$$\frac{dC}{dt} = -\left(k + \frac{1}{\tau_w}\right)C + \frac{C_{in}}{\tau_w}$$

En notant C_0 , la concentration dans le lac à $t = 0$:

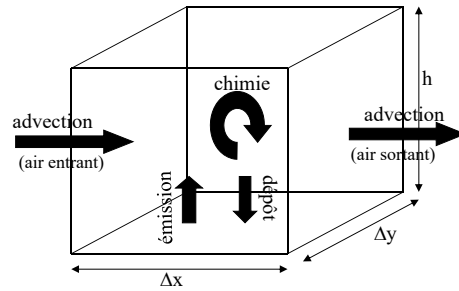
$$C_t = C_0 e^{-\left(\frac{1}{\tau_w} + k\right)t} + \frac{C_{in}}{1 + k\tau_w} \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{\tau_w} + k\right)t}\right)$$

• Si $k\tau_w \ll 1$: le temps de vie chimique est grand devant le temps caractéristique du transport. => $C_\infty \approx C_{in}$

• Si $k\tau_w \gg 1 \Rightarrow C_\infty \approx C_{in}/k\tau_w$. C dépend du temps de résidence de l'eau dans le lac et de la constante de réaction.

16

Exemple : la boîte eulérienne (atmosphère)



La boîte renferme une région de l'atmosphère. La hauteur h de la boîte représente par exemple la hauteur de la couche limite.

Le modèle est construit sur la conservation de la masse à l'intérieur de la boîte.

$$\frac{dC}{dt} = \text{émission} + \text{advection} + \text{dépôt} + \text{chimie}$$

C : concentration de l'espèce dans la boîte

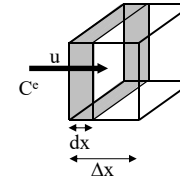
17

Emission

q : quantité émise par unité de temps et de surface (par exemple molécule.cm⁻².s⁻¹) dans la boîte.

Soit la variation de C par unité de temps : $\frac{dC}{dt} = \frac{qS_{box}}{V_{box}} = \frac{q}{h}$ avec $\begin{cases} S_{box} = \Delta x \times \Delta y \\ V_{box} = \Delta x \times \Delta y \times h \end{cases}$

Advection



Transport du « milieu extérieur » dans la boîte :

C_{out} : concentration à l'extérieur de la boîte

u : vitesse du vent

Sur l'intervalle de temps dt , la masse d'air se déplace de : $dx = udt$

La quantité de matière (molécules) apportée pendant dt est donc :

$$C_{out}dV = C_{out}\Delta y h dx = C_{out}\Delta y h u dt$$

On suppose que la matière apportée est instantanément « mélangée » dans tout le volume de la boîte. La variation de la concentration dans la boîte sur l'intervalle de temps dt est donc :

$$dC = \frac{C_{out}\Delta y h u dt}{V_{box}} \quad \text{soit} \quad \frac{dC}{dt} = \frac{u}{\Delta x} C_{out}$$

De même, pour le transport de la boîte vers le « milieu extérieur », on montre que : $\frac{dC}{dt} = -\frac{u}{\Delta x} C$

18

Dépôt sec

Le flux ϕ (par exemple molécules déposées par unité de temps et de surface) est proportionnel à la concentration. La constante de proportionnalité a la dimension d'une vitesse (elle est qualifiée de vitesse de dépôt v_d).

Le flux de dépôt est donc : $\phi = v_d C$ (molécule.cm⁻².s⁻¹)

soit la quantité totale déposée par unité de temps : $v_d S_{box} C$

soit la variation de la concentration dans la boîte : $\frac{dC}{dt} = -\frac{v_d S_{box} C}{V_{box}} = -\frac{v_d}{h} C$

Chimie

$$\frac{dC}{dt} = R \quad R \text{ représente le terme net lié aux réactions de production et de consommation de l'espèce}$$

=> Soit l'équation gouvernant la variation des concentrations dans un modèle de boîte :

$$\frac{dC}{dt} = \frac{q}{h} + R + \frac{v_d}{h} C + \frac{u}{\Delta x} (C_{out} - C)$$

Remarque :

Le temps de résidence de l'air dans la boîte est donné par : $\tau_r = \frac{\Delta x}{u}$

19

Application

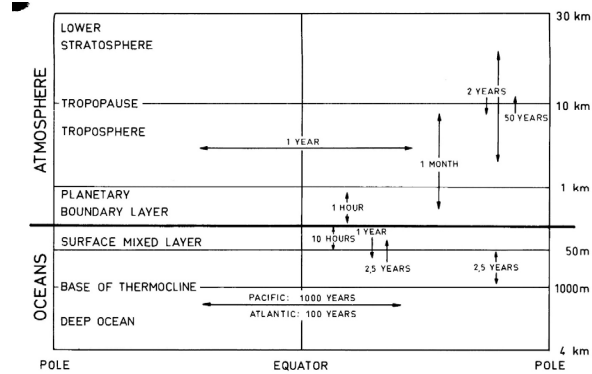
On souhaite estimer le niveau de concentration des oxydes d'azote (NOx) dans une masse d'air urbaine. On considère la situation suivante : une zone urbaine de 50 km, balayée par un vent de 2 m.s⁻¹. La hauteur de la couche de mélange est de 1000 m. Le flux d'émission des NOx est de 5.10¹² molécule.cm⁻².s⁻¹. On suppose que la vitesse d'oxydation des NOx en HNO₃ est de 5% h⁻¹. La vitesse de dépôt des NOx en zone urbaine est de 0,5 cm.s⁻¹. Par ailleurs, la ville est entourée d'une zone rurale, caractérisée par une concentration de NOx de 5.10¹⁰ molécule.cm⁻³ (2 ppb).

On suppose que la concentration initiale des NOx est de 5.10¹⁰ molécule.cm⁻³. Tracer la courbe de la concentration en NOx en fonction du temps. Quelle est la concentration en NOx lorsque l'état stationnaire est atteint ?

20

Variabilité des échelles spatiales et temporelles

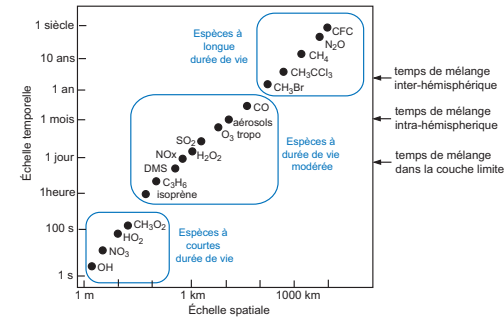
Quelle est l'échelle spatiale couverte durant le temps de vie d'un composé donné ? Apporter une réponse à cette question est souvent essentiel pour apprécier l'espace géographique potentiellement perturbé par une source de pollution donnée, mais également pour comprendre les processus contrôlant la variabilité spatiale et temporelle des espèces atmosphériques.



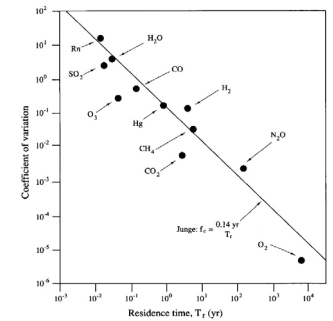
Echelle de temps caractéristique pour l'échange de masses d'air et d'eau entre les différents compartiments.

21

Exemple :



Comparaison des temps de vie et des échelles spatiales pour quelques espèces atmosphériques.



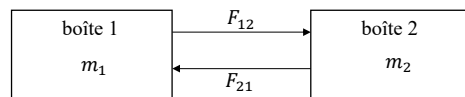
Variabilité des concentrations atmosphériques (exprimée à partir du coefficient de variation des mesures) en fonction du temps de résidence

Le temps de vie du méthane dans l'atmosphère est de l'ordre de 10 ans. Ce temps est grand devant le temps requis pour mélanger un composé à l'échelle de la planète dans la troposphère (typiquement de l'ordre de 1 an). En conséquence, le méthane est une espèce bien mélangée dans l'ensemble de la troposphère et sa variabilité dans le temps (aux échelles interannuelles et saisonnières) est « faible ».

L'intervalle de temps séparant la production d'espèces radicalaires dans l'atmosphère (par exemple le radical OH) n'est que de l'ordre de la seconde (les espèces sont consommées où elles sont produites). Ces espèces présentent ainsi une forte variabilité spatiale et temporelle (notamment un cycle journalier prononcé).

II – modèles multi-boîte

Le traitement des échelles de temps et le comportement dynamique dans une boîte donnée peut se généraliser sur un système à plusieurs boîtes échangeant de la matière entre-elles. Le couplage des boîtes joue directement sur la stabilité du système et peut générer des effets de rétroaction marqués



$$\left. \begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= -k_{12}m_1 + k_{21}m_2 \\ \frac{dm_2}{dt} &= k_{12}m_1 - k_{21}m_2 \end{aligned} \right\}$$

Système d'équations différentielles couplées par les termes d'échange F_{ij}

A l'état stationnaire :

$$\frac{m_1^\infty}{m_2^\infty} = \frac{k_{21}}{k_{12}}$$

et

$$m_1^\infty + m_2^\infty = m_1^0 + m_2^0 = m_1 + m_2 = cte$$

Par définition, le temps de résidence de l'espèce dans chaque réservoir est donné par :

$$\tau_1 = \frac{m_1^\infty}{F_{12}} = \frac{m_1^\infty}{k_{12}m_1^\infty} = \frac{1}{k_{12}}$$

$$\tau_2 = \frac{1}{k_{21}}$$

23

Remarque à propos de l'intégration du système d'équations différentielles

Il est fréquent que le système couplé d'eq. dif. ne présente pas de solution analytique simple. L'intégration du système dans le temps est alors effectuée numériquement. Pour les « systèmes simples », la solution des équations différentielles s'obtient également par utilisation d'algèbre matricielle.

Le système d'équation précédent admet pour solution :

$$\begin{cases} m_1 = \frac{k_{21}(m_1^0 + m_2^0)}{k_{12} + k_{21}} + \frac{k_{12}m_1^0 - k_{21}m_2^0}{k_{12} + k_{21}} e^{-(k_{12} + k_{21})t} \\ m_2 = \frac{k_{12}(m_1^0 + m_2^0)}{k_{12} + k_{21}} + \frac{-k_{12}m_1^0 + k_{21}m_2^0}{k_{12} + k_{21}} e^{-(k_{12} + k_{21})t} \end{cases}$$

Le temps de réponse requis pour éliminer une perturbation du système est donné par le terme de décroissance exponentielle. La réduction d'une perturbation d'un facteur $1/e$ requiert un temps :

$$\tau_1^* = \tau_2^* = \frac{1}{k_{12} + k_{21}} = \tau_{cycle}^* \quad \text{ou encore} \quad \frac{1}{\tau_{cycle}^*} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}$$

Le temps de réponse du système est plus court que le temps de résidence dans chaque réservoir.

Remarque :

Si $\tau_1 \ll \tau_2 \Rightarrow$ le temps de réponse τ^* dans chaque réservoir tend vers τ_1 .

Le couplage des 2 réservoirs a augmenté la stabilité du système. Le temps de résidence le plus court contrôle le temps de réponse de l'ensemble du système.

24

II – système non-linéaire

Pour certaines situations, l'hypothèse d'une relation linéaire entre les flux associés aux pertes et la quantité de matière renfermée dans le réservoir n'est pas valide. Des relations non-linéaires doivent être mise en place pour décrire les flux dans le système considéré.

Exemple 1

La croissance des systèmes biologiques est souvent représenté par l'équation différentielle :

$$\frac{dm}{dt} = Am - Bm^2$$

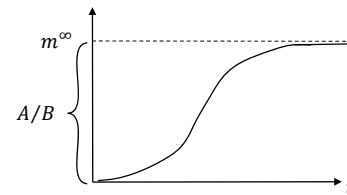
Croissance sans limitation en nutriment ou espace

rétroaction négative dû à un effet de saturation

A l'état stationnaire ($t \rightarrow \infty$) :

$$m^\infty = \frac{A}{B}$$

Profil type associé à la solution de l'eq. dif. :



- Au voisinage de l'origine ($Am \gg Bm^2$) : la croissance de m est proche d'une croissance exponentielle.
- Lorsque t devient grand ($Bm^2 \rightarrow Am$) : $dm/dt \rightarrow 0$ et $m \rightarrow A/B$ 25

Exemple 2

Le cycle du carbone montre de forte non-linéarité, en particulier en ce qui concerne les débits :

- océan \rightarrow atmosphère

Soit m_o la masse totale de carbone dissoute dans les océans (CO_2 , H_2CO_3 , HCO_3^- , CO_3^{2-}).

Le débit océan \rightarrow atmosphère dépend de m_o selon : $F_{O \rightarrow A} = k_{OA} m_o^\alpha$ avec $\alpha=9$

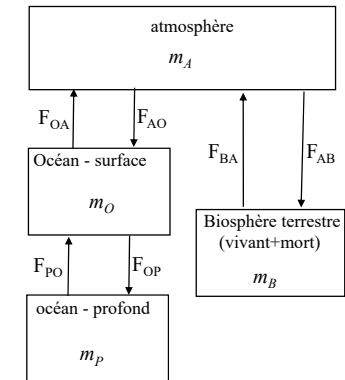
Le facteur α est lié à un « effet tampon » des eaux océaniques conduisant à la redistribution du CO_2 dissous sous ses différentes formes acido/basique. Une petite variation du contenu en carbone dissous s'accompagne donc d'une grande variation du débit océan \rightarrow atmosphère

- atmosphère \rightarrow biosphère

Le débit atmosphère \rightarrow biosphère peut être représenté selon :

$$F_{A \rightarrow B} = k_{AB} m_A^\alpha \quad \text{avec } \alpha < 1$$

L'origine du facteur « $\alpha < 1$ » est liée au fait que la croissance de la végétation n'est généralement pas limitée par la disponibilité en CO_2 . Une augmentation substantielle de CO_2 dans l'atmosphère n'induit donc pas une augmentation proportionnelle du débit atmosphère \rightarrow biosphère



Modèle simplifié du cycle du carbone

On introduit du carbone dans le système (carbone fossile). Quelle est la redistribution de ce carbone supplémentaire dans les différents réservoirs lorsque le système retrouve un état d'équilibre ?

26

Contenu en carbone à l'équilibre (en $Pg=10^{15}$ g) dans les différents réservoirs pour une situation non perturbée (préindustrielle), après introduction de 1000 Pg dans le système puis 6000 Pg (contenu approximatif des réserves en C fossile).

	préindustrielle	après 1000 Pg		après 6000 Pg	
	contenu	contenu	augment. (%)	contenu	augment. (%)
Atmosphère	700	840	20	1880	170
Biosphère terrestre	3000	3110	4	3655	22
Océan de surface	1000	1020	2	1115	12
Océan profond	35000	35730	2	39050	12

Remarque :

Si tous les flux étaient proportionnels aux contenus des réservoirs, l'augmentation (en %) aurait été la même dans chaque réservoir (de l'ordre de 15 % pour le cas à 6000 Pg et de 2,5 % pour le cas à 1000 Pg).

27

**- Systèmes couplés -
Influence des rétroactions sur la
stabilité des systèmes**

Quelques références :

The Earth System, L.R. Kump, J.F. Kasting et R.G. Crane. Pearson Prentice Hall (Edt), 2002.
Les ages de Gaia, J. Lovelock, R. Laffont (Edt), 1990.

28

Un exemple ...

Depuis la création de la terre, l'intensité du rayonnement solaire a augmenté de près de 30%. Le soleil devrait mourir dans $\sim 5 \cdot 10^9$ ans. Son intensité lumineuse sera alors de 2 à 3 fois ce qu'elle est aujourd'hui.

De quelle manière l'intensité solaire réduite a-t-elle affectée la terre primitive ?

Si l'on maintient les paramètres actuels (albédo, opacité de l'atmosphère aux rayonnements solaire et tellurique): la terre aurait été plus froide, avec des océans gelés au-delà de $-2 \cdot 10^9$ ans.

Le paradoxe : L'eau liquide semble exister sur terre depuis plus de $3,8 \cdot 10^9$ ans (avec des organismes vivants depuis au moins $3,5 \cdot 10^9$ ans).

L'interprétation : L'explication actuellement proposée est que l'atmosphère primitive était plus riche en gaz à effet de serre (GES), notamment en CO_2 . Les teneurs atmosphériques en GES ont diminués à mesure que l'intensité solaire a augmentée.

La question : Le système climatique terrestre possède-t-il un mécanisme interne stabilisant la température de surface à un niveau permettant le maintien de la vie ? 29

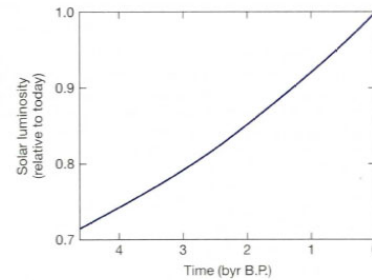


FIGURE 1-12
Estimated change in solar luminosity with time. The unit of age on the horizontal axis, byr B.P., stands for "billions of years before the present." (After D.O. Gough, *Solar Physics* 74, p. 21, 1981.)

L'hypothèse Gaia (Gaia: déesse de la terre de la mythologie grecque)

J. Lovelock (biogéochimiste contemporain) a suggéré que la vie était responsable de la stabilité du climat terrestre.

Pour l'exemple précédent : les organismes vivants auraient consommé le CO_2 atmosphérique via la photosynthèse, entraînant l'enfouissement du carbone dans les sédiments. Par ce processus, le biotope aurait diminué le CO_2 atmosphérique à un niveau permettant de contrebalancer l'augmentation régulière de l'intensité solaire.

L'hypothèse Gaia :

Conception faisant de la terre un système autorégulé et évolutif, associant étroitement l'ensemble des êtres vivants, les roches de surface, l'océan et l'atmosphère. Selon cette théorie, le système a « un but » : maintenir les conditions de surface favorables à la vie.

Certains « partisans » de cette hypothèse suggèrent de plus que :

Le biotope « manipule » son environnement pour son propre bénéfice, voire optimise les conditions favorables à la vie pour le bénéfice de l'ensemble des organismes vivants (homeostasis)

En 2001 : 4 organisations internationales de recherches sur le changement global ont signé une déclaration énonçant « le système terre se comporte comme un système unique autorégulé, composé d'éléments physiques, chimiques, biologiques et humains ».

Le concept est en rupture avec l'approche « traditionnelle » par :

- les sciences biologiques : les organismes vivants s'adaptent à leur milieu mais ne le transforment pas.
- les sciences de la terre : seules les forces « géologiques » (d'origine physique et chimique) expliquent l'évolution de l'atmosphère, de la croûte terrestre et des océans. 30

L'approche systémique

=> Application du concept de système à la définition et la résolution de problèmes.

=> Approche utilisée dans une multitude de domaines.

Exemple : étude de la physiologie humaine

Le corps est composé d'un ensemble de systèmes indispensable aux fonctions vitales :

- Un système respiratoire (assimilation de O_2 , rejet de CO_2)
- Un système cardio-vasculaire (transport de O_2 et CO_2)
- Un système digestif (assimilation des nutriments)
- Un système nerveux (perception de l'environnement interne et externe)
- Un système endocrinien (régulation de processus tels que la croissance)
- ...

Ces systèmes sont interconnectés et leur fonctionnement de concert est indispensable pour le maintien du corps humain en bonne santé.

Le système terre (Gaia) s'apparente à un système physiologique : il semble destiné à réguler le climat et la chimie de la terre de façon optimale et propice à la vie.

Les composantes d'un système

Le système est une entité renfermant différentes composantes interconnectées fonctionnant comme un ensemble complexe. Ces composantes peuvent être un réservoir de matière (cf. cours sur les cycles biogéochimique), un réservoir d'énergie, un attribut du système (la température, la pression) ou un sous-système (tel que le système cardiovasculaire vis-à-vis du corps humain).

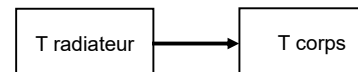
L'état d'un système

C'est l'ensemble des valeurs prises par les différentes variables du système à un instant donné. Exemple : la température du corps, la pression artérielle sont quelques attributs qui déterminent l'état du corps humain.

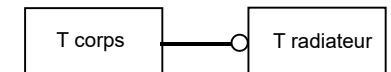
Le couplage

C'est le lien (physique, chimique, biologique ou tout transfert « d'informations ») entre 2 composantes d'un système donné.

Exemple



Couplage positif : si la température du radiateur augmente, elle provoque une augmentation de la température ressentie par le corps

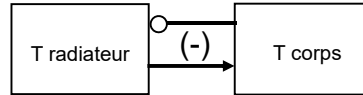


Couplage négatif : si la température ressentie augmente, l'individu agit en diminuant la température du radiateur

Les boucles de rétroactions

C'est un ensemble de couplages successifs formant une boucle. La rétroaction est un mécanisme incessant d'actions et de réponse aux actions.

- Les boucles de rétroactions négatives tendent à diminuer l'effet d'une perturbation (correction des « erreurs »). Exemple: les couplages précédents forment une boucle négative

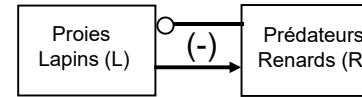


- Les boucles de rétroactions positives amplifient l'effet d'une perturbation (amplification des « erreurs »). Les boucles de rétroaction positives s'apparentent à des cercles vicieux (ou vertueux).

Remarque : une boucle de rétroaction est négative si elle renferme un nombre impair de couplages négatifs.

33

Exemple de rétroaction négative : le système proies/prédateurs



Il est possible de résoudre numériquement le système d'équations différentielles, en procédant par itération.

$$\frac{dL}{dt} \approx \frac{L_{t+\Delta t} - L_t}{\Delta t} = aL_t - bL_tR_t$$

$$L_{t+\Delta t} = L_t + (aL_t - bL_tR_t)\Delta t$$

De même : $R_{t+\Delta t} = R_t + (cL_tR_t - eR_t)\Delta t$

Résolution

Itération 1 ($t = t_0 + \Delta t$):

$$L_1 = L_0 + (aL_0 - bL_0R_0)\Delta t$$

$$R_1 = R_0 + (cL_0R_0 - eR_0)\Delta t$$

Itération 2 ($t = t_0 + 2\Delta t$):

$$L_2 = L_1 + (aL_1 - bL_1R_1)\Delta t$$

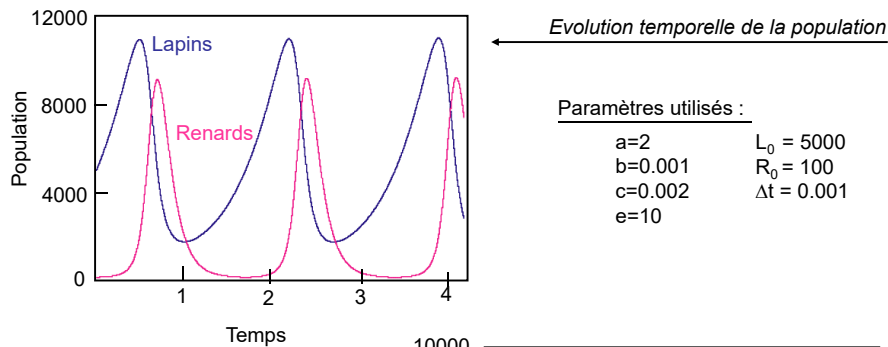
$$R_2 = R_1 + (cL_1R_1 - eR_1)\Delta t$$

etc ...

34

$$\frac{dL}{dt} = \underbrace{aL}_{\text{Croissance des lapins en l'absence de prédateur}} - \underbrace{bLR}_{\text{capture des lapins par des renards}}$$

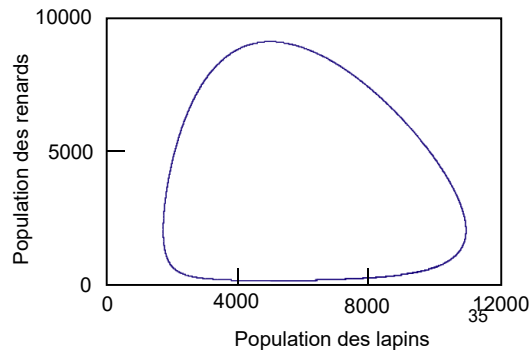
$$\frac{dR}{dt} = \underbrace{cLR}_{\text{reproduction des renards en fonction du nombre de lapins capturés}} - \underbrace{eR}_{\text{Mortalité des renards}}$$



Paramètres utilisés :

$$\begin{array}{ll} a=2 & L_0 = 5000 \\ b=0.001 & R_0 = 100 \\ c=0.002 & \Delta t = 0.001 \\ e=10 & \end{array}$$

Population des renards en fonction de la population des lapins



La population des lapins et des renards oscille autour de valeurs bornées.

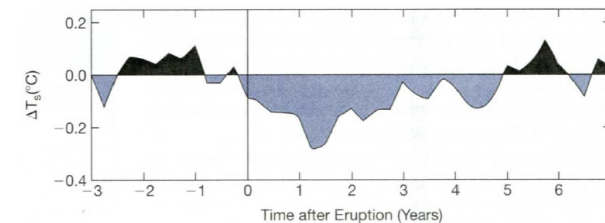
=> Le système est stable

35

Perturbation et forçage

La compréhension du système terre passe souvent par l'analyse des réponses du système suite à une perturbation (variation temporaire d'un des paramètres du système)

Exemple : Injection massive de SO_2 suite à une éruption volcanique majeure.



La température de surface décroît de ~ 0.5 °C. Elle retrouve sa valeur initiale après quelques années.

On parle de forçage lorsque la perturbation est persistante. Exemple : l'augmentation progressive de l'intensité solaire représente un forçage sur le système terre.

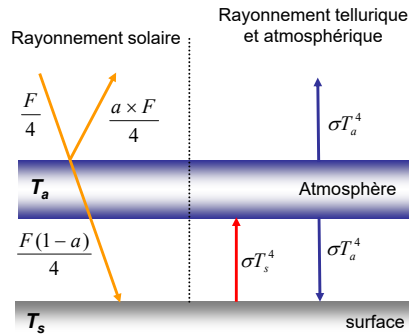
36

Le monde des pâquerettes – la planète Floréale (Daisyworld)

Floréale : modèle conceptuel simple présenté par Lovelock pour discuter l'hypothèse Gaia.
L'approche vise à comparer la température de surface de Floréale en présence et en l'absence de vie (représentée par des pâquerettes qui se disputent l'espace vital) lorsqu'elle est soumise à une variation de l'intensité solaire.

La planète Floréale

Floréale possède un soleil (de constante solaire $F=1370 \text{ W.m}^{-2}$) et une atmosphère totalement transparente au rayonnement solaire et totalement opaque au rayonnement tellurique (voir le cours sur le climat).



Calcul de Ts en l'absence de pâquerettes

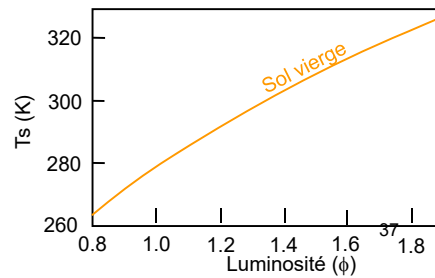
L'albédo est celui du sol nu, fixé à $a_s=0.5$

Représentation de l'évolution de l'intensité solaire :

$$\phi = \frac{\text{Constante solaire } F \text{ à } t}{\text{Constante solaire } F \text{ actuelle}}$$

L'équilibre radiatif donne (cf. cours climat) :

$$T_s = \left[\frac{\phi F (1 - a_s)}{2\sigma} \right]^{1/4}$$



Influence des pâquerettes sur la température de surface de floréale

2 populations de pâquerettes :

Pâquerette blanche : albédo $a_B=0.75$

Pâquerette noire : albédo $a_N=0.25$

Lorsque la planète est froide, les pâquerettes noires prospèrent : elles absorbent la lumière solaire et emmagasinent la chaleur pour leur usage. La situation est inversée lorsque la planète est « chaude ».

Les rétroactions sur floréale :

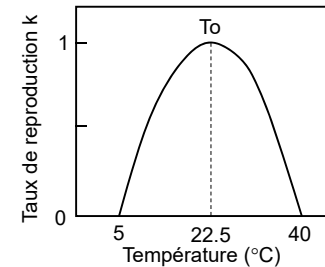
Elles sont fonctions des pâquerettes (blanches ou noires) et de la température (par rapport à T_0).

x_B : surface relative couverte par les pâquerettes blanches

x_N : surface relative couverte par les pâquerettes noires

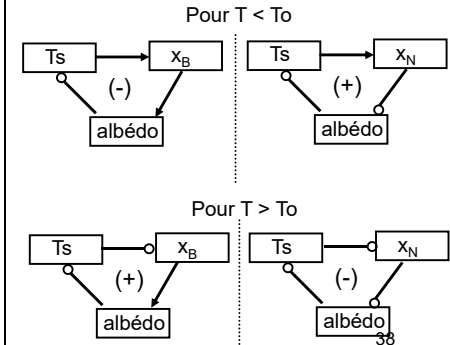
La biologie des pâquerettes sur floréale :

Le taux de reproduction k des pâquerettes est fonction de la température environnante. Il est optimum pour une température T_0 de 295.5 K.



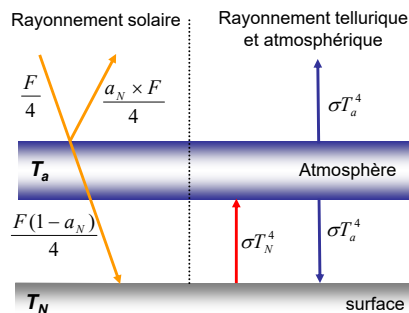
Expression de k en fonction de T

$$k(T) = 1 - b(T_0 - T)^2 \quad (b = 3,265 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-2})$$



Remarque : Si les pâquerettes ne sont pas distribuées de façon homogène, la température environnante des pâquerettes noires (T_N) est supérieure à T_s ($a_N < a$). De même, $T_B < T_s$ ($a_B > a$)

Bilan énergétique au dessus des pâquerettes noires



$$\text{Bilan en surface : } \frac{F(1 - a_N)}{4} + \sigma T_a^4 = \sigma T_N^4$$

$$\text{Soit : } T_N^4 = \frac{F}{4\sigma} (a - a_N) + T_s^4$$

$$\text{De même : } T_B^4 = \frac{F}{4\sigma} (a - a_B) + T_s^4$$

Evaluation de l'albédo planétaire

$$a = x_B a_B + x_N a_N + x_S a_S$$

Estimation de la température moyenne de surface

$$T_s = \left[\frac{\phi F (1 - a)}{2\sigma} \right]^{1/4}$$

Evolution des pâquerettes en fonction du temps

$$\frac{dx_N}{dt} = \underbrace{k(T_N) \cdot x_N \cdot x_S}_{\text{Croissance des pâquerettes (dépend de la surface disponible } x_S)} - \underbrace{k_p x_N}_{\text{Mortalité des pâquerettes}}$$

De même :

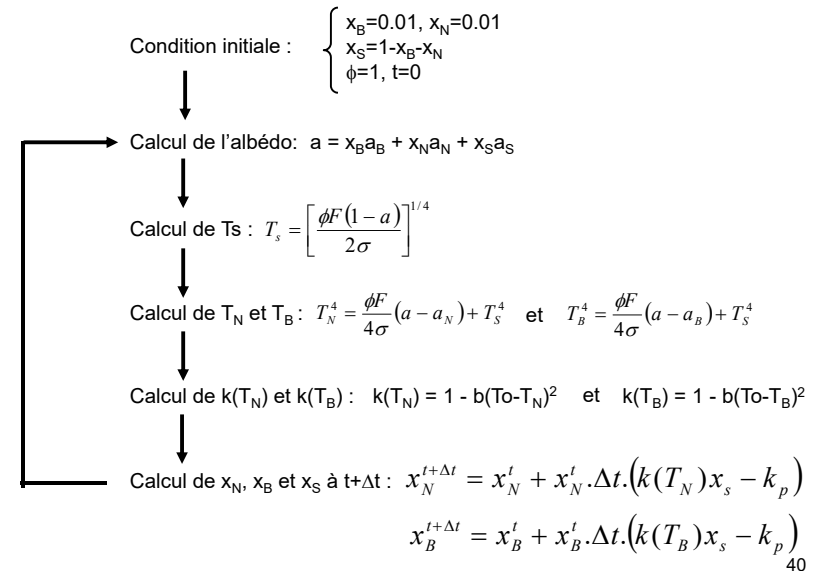
$$\frac{dx_B}{dt} = k(T_B) \cdot x_B \cdot x_S - k_p x_B$$

Ces équations différentielles peuvent être résolues numériquement, selon une approche itérative.

$$x_N^{t+\Delta t} = x_N^t + x_N^t \cdot \Delta t \cdot (k(T_N) x_S - k_p)$$

$$x_B^{t+\Delta t} = x_B^t + x_B^t \cdot \Delta t \cdot (k(T_B) x_S - k_p)$$

Algorithme pour la résolution du système

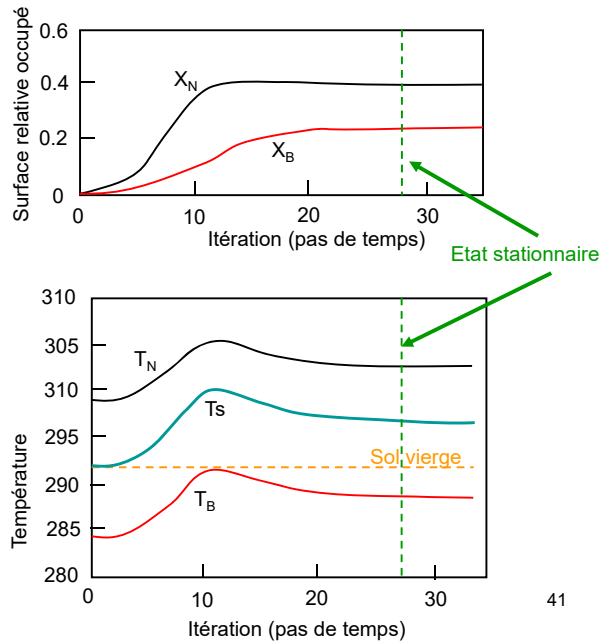


Evolution des surfaces occupées en fonction du temps

Prévision sur
floréal pour $\phi=1.2$

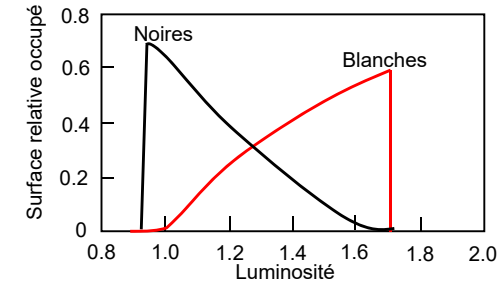
Le système tend vers un état stationnaire (état d'équilibre) où la surface occupée par chaque population de pâquerette n'évolue plus. La température de surface est alors également stable.

Il est possible de calculer l'influence du forçage lié à une modification de l'intensité sur le climat de floréal en recherchant la température d'équilibre en fonction des valeurs de ϕ

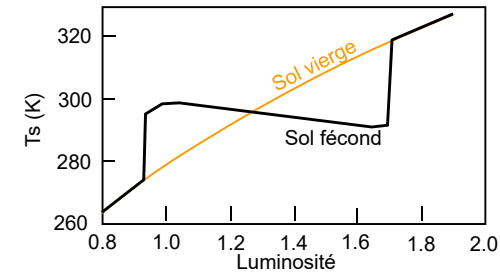


41

Evolution de l'équilibre sur floréale en fonction de l'intensité du rayonnement solaire



=> En présence de pâquerettes, la température sur floréale est stable. La température de surface est maintenue à une valeur voisine de la température optimale ($T_0=295K$). Pour des conditions de faible luminosité, les pâquerettes noires prédominent (réchauffant ainsi la surface). Pour des conditions de forte luminosité, les pâquerettes blanches prédominent (refroidissant ainsi la surface). Le système s'est autorégulé !



Ce monde imaginaire régule sa température à un niveau proche de l'optimum pour la croissance des pâquerettes, et ceci sur une large étendue du rayonnement de son étoile. Ce modèle évolutif est stable, insensible aux conditions initiales et résistant 42 aux perturbations.